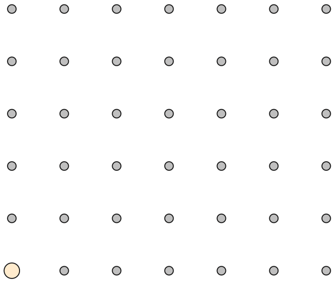
Percolation arithmétique :

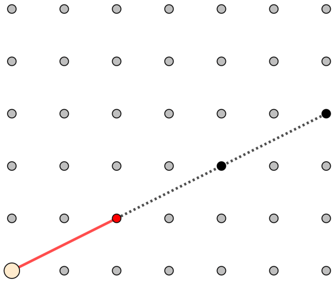
étude des propriétés statistiques des points visibles dans un réseau

avec Samuel Le Fourn
et Mike Liu



Percolation arithmétique :

étude des propriétés statistiques des points visibles dans un réseau

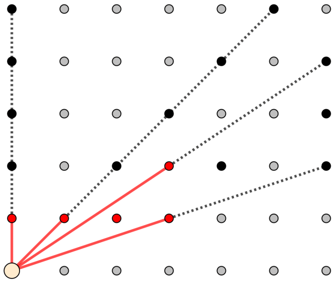


avec Samuel Le Fourn
et Mike Liu

Percolation arithmétique :

étude des propriétés statistiques des points visibles dans un réseau

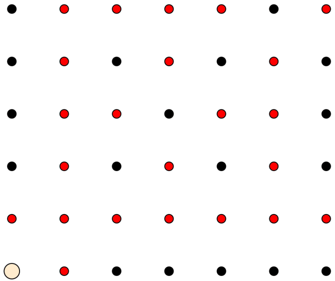
avec Samuel Le Fourn
et Mike Liu



Percolation arithmétique :

étude des propriétés statistiques des points visibles dans un réseau

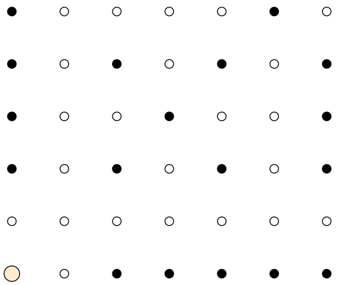
avec Samuel Le Fourn
et Mike Liu



Percolation arithmétique :

étude des propriétés statistiques des points visibles dans un réseau

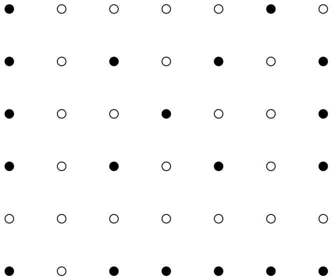
avec Samuel Le Fourn
et Mike Liu



Percolation arithmétique :

étude des propriétés statistiques des points visibles dans un réseau

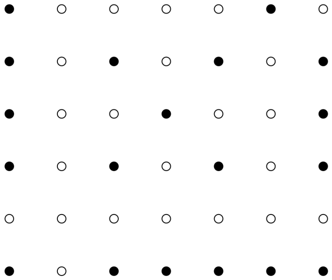
avec Samuel Le Fourn
et Mike Liu



Percolation arithmétique :

étude des propriétés statistiques des points visibles dans un réseau

avec Samuel Le Fourn
et Mike Liu

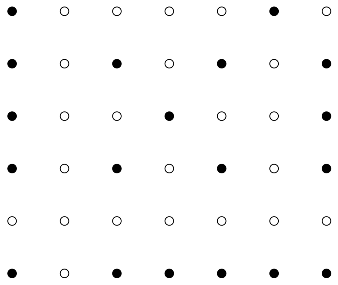


x visible $\iff$ $\mathrm{PGCD}(x_1, \ldots, x_d) = 1$

Percolation arithmétique :

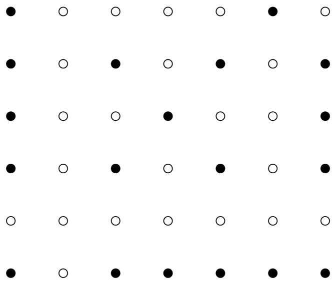
étude des propriétés statistiques des points visibles dans un réseau

avec Samuel Le Fourn
et Mike Liu



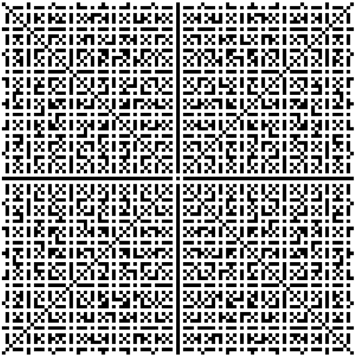
x visible $\iff$ $\mathrm{PGCD}(x_1, \ldots, x_d) = 1$

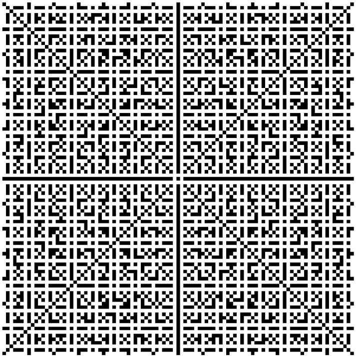
coloriage $\mathrm{SL}_d(\mathbb{Z})$-invariant de $\mathbb{Z}^d$



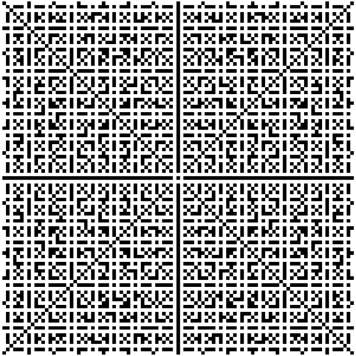
x *visible* $\iff \mathsf{PGCD}(x_1, \ldots, x_d) = 1$

coloriage $\mathsf{SL}_d(\mathbb{Z})$-*invariant de* $\mathbb{Z}^d$



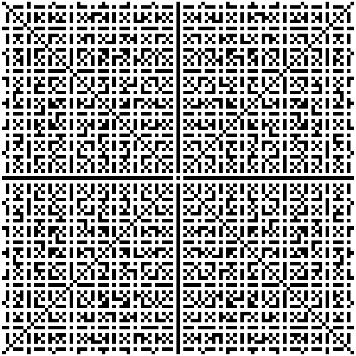


Que faire avec ce coloriage ?



Que faire avec ce coloriage ?

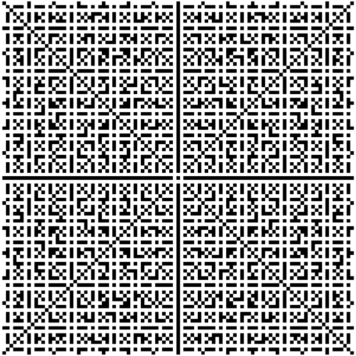
→ Etudier ses composantes connexes blanches et noires



Que faire avec ce coloriage ?

→ Etudier ses composantes connexes blanches et noires

Vardi 99

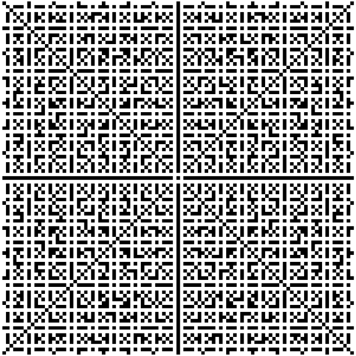


Que faire avec ce coloriage ?

→ Etudier ses composantes connexes blanches et noires

Vardi 99

→ Mettre des probabilités là-dedans



Que faire avec ce coloriage ?

→ Etudier ses composantes connexes blanches et noires

Vardi 99

→ Mettre des probabilités là-dedans

Regardons ce coloriage depuis un point choisi « uniformément au hasard » dans $\mathbb{Z}^d$

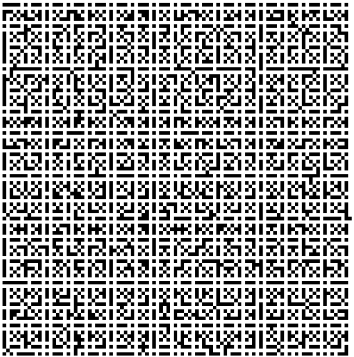
Que faire avec ce coloriage ?

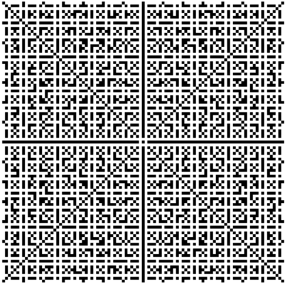
→ Etudier ses composantes connexes blanches et noires

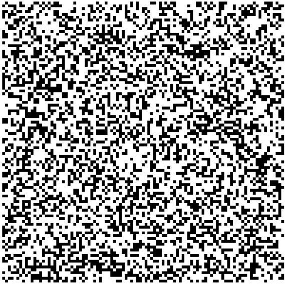
Vardi 99

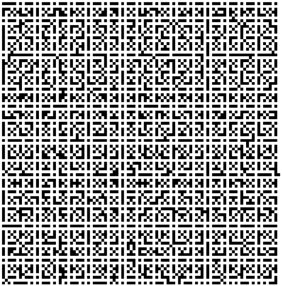
→ Mettre des probabilités là-dedans

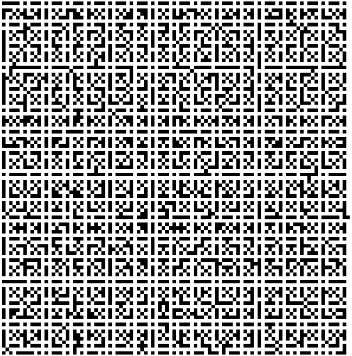
Regardons ce coloriage depuis un point choisi « uniformément au hasard » dans $\mathbb{Z}^d$



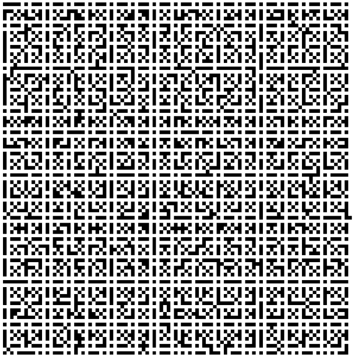






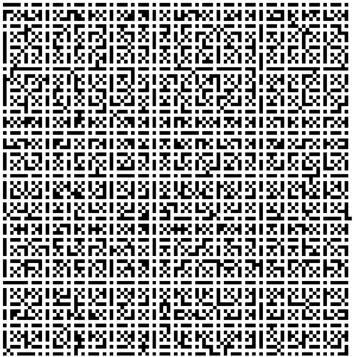


Propos de cet exposé :



Propos de cet exposé :

→ Définir proprement ce dont on parle



Propos de cet exposé :

→ Définir proprement ce dont on parle

→ Compter combien il y a de composantes connexes blanches/noires infinies

Propos de cet exposé :

→ Définir proprement ce dont on parle

→ Compter combien il y a de composantes connexes blanches/noires infinies

Echauffement :

Le problème à un point

Propos de cet exposé :

→ Définir proprement ce dont on parle

→ Compter combien il y a de composantes connexes blanches/noires infinies

Echauffement :

Le problème à un point

$$F_n = \{-n, \ldots, n\}^d$$

Propos de cet exposé :

→ Définir proprement ce dont on parle

→ Compter combien il y a de composantes connexes blanches/noires infinies

Echauffement :

Le problème à un point

$$F_n = \{-n, \dots, n\}^d$$

ou

$$\{0, \dots, n\}^d$$

ou

$$\{x \in \mathbb{Z}^d : \|x\|_2 \leq n\}$$

Propos de cet exposé :

→ Définir proprement ce dont on parle

→ Compter combien il y a de composantes connexes blanches/noires infinies

Echauffement :

Le problème à un point

$$F_n = \{-n, \ldots, n\}^d$$

ou

$$\{0, \ldots, n\}^d$$

ou

$$\{x \in \mathbb{Z}^d : \|x\|_2 \leq n\}$$

arXiv1804.06486 : On coprime percolation

Echauffement :

Le problème à un point

$$F_n = \{-n, \dots, n\}^d$$

ou

$$\{0, \dots, n\}^d$$

ou

$$\{x \in \mathbb{Z}^d : \|x\|_2 \leq n\}$$

arXiv1804.06486 : On coprime percolation

Théorème à un point

(Dirichlet, 1849)

Soit X_n un point choisi uniformément au hasard dans F_n.

Alors $\mathbb{P}(X_n \text{ visible}) \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{1}{\zeta(d)}$.

Echauffement :

Le problème à un point

$$F_n = \{-n, \dots, n\}^d$$

ou

$$\{0, \dots, n\}^d$$

ou

$$\{x \in \mathbb{Z}^d : \|x\|_2 \leq n\}$$

arXiv1804.06486 : On coprime percolation

Théorème à un point

(Dirichlet, 1849)

Soit X_n un point choisi uniformément au hasard dans F_n.

Alors $\mathbb{P}(X_n \text{ visible}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\zeta(d)}$.

Pour $s \geq 1$, $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \in [1, \infty]$

Théorème à un point

(Dirichlet, 1849)

Soit X_n un point choisi uniformément au hasard dans F_n.

Alors $\mathbb{P}(X_n \text{ visible}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\zeta(d)}$.

Pour $s \geq 1$, $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \in [1, \infty]$

Subtilités

Théorème à un point

(Dirichlet, 1849)

Soit X_n un point choisi uniformément au hasard dans F_n.

Alors $\mathbb{P}(X_n \text{ visible}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\zeta(d)}$.

Pour $s \geq 1$, $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \in [1, \infty]$

Subtilités

→ La proportion n'est pas clairement bien définie.

Théorème à un point

(Dirichlet, 1849)

Soit X_n un point choisi uniformément au hasard dans F_n.

Alors $\mathbb{P}(X_n \text{ visible}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\zeta(d)}$.

Pour $s \geq 1$, $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \in [1, \infty]$

Subtilités

→ La proportion n'est pas clairement bien définie.

→ On n'a pas de σ-additivité.

Théorème à un point

(Dirichlet, 1849)

Soit X_n un point choisi uniformément au hasard dans F_n.

Alors $\mathbb{P}(X_n \text{ visible}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\zeta(d)}$.

Pour $s \geq 1$, $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \in [1, \infty]$

Subtilités

→ La proportion n'est pas clairement bien définie.

→ On n'a pas de σ-additivité.

($\mathbb{Z}^d$ est l'union de ses singletons)

Subtilités

→ La proportion n'est pas clairement bien définie.

→ On n'a pas de σ-additivité.

($\mathbb{Z}^d$ est l'union de ses singletons)

Comment formuler la version « coloriage » du théorème ?

Subtilités

→ La proportion n'est pas clairement bien définie.

→ On n'a pas de σ-additivité.

($\mathbb{Z}^d$ est l'union de ses singletons)

Comment formuler la version « coloriage » du théorème ?

$$\Omega = \{\text{blanc}, \text{noir}\}^{\mathbb{Z}^d}$$

Subtilités

→ La proportion n'est pas clairement bien définie.

→ On n'a pas de σ-additivité.

($\mathbb{Z}^d$ est l'union de ses singletons)

Comment formuler la version « coloriage » du théorème ?

$$\Omega = \{\text{blanc}, \text{noir}\}^{\mathbb{Z}^d}$$

topologie produit

espace métrisable compact

Subtilités

→ La proportion n'est pas clairement bien définie.

→ On n'a pas de σ-additivité.

($\mathbb{Z}^d$ est l'union de ses singletons)

Comment formuler la version « coloriage » du théorème ?

$$\Omega = \{\text{blanc}, \text{noir}\}^{\mathbb{Z}^d}$$

topologie produit

espace métrisable compact

$$v : x \mapsto \begin{cases} \text{blanc} & \text{si } \mathrm{PGCD}(x) = 1 \\ \text{noir} & \text{sinon} \end{cases}$$

Comment formuler la version « coloriage » du théorème ?

$$\Omega = \{\text{blanc}, \text{noir}\}^{\mathbb{Z}^d}$$

topologie produit

espace métrisable compact

$$v : x \mapsto \begin{cases} \text{blanc} & \text{si } \mathrm{PGCD}(x) = 1 \\ \text{noir} & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour $y \in \mathbb{Z}^d$, on définit $\tau_y \cdot v$ comme le coloriage v translaté de y.

Comment formuler la version « coloriage » du théorème ?

$$\Omega = \{\text{blanc}, \text{noir}\}^{\mathbb{Z}^d}$$

topologie produit

espace métrisable compact

$$v : x \mapsto \begin{cases} \text{blanc} & \text{si } \mathrm{PGCD}(x) = 1 \\ \text{noir} & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour $y \in \mathbb{Z}^d$, on définit $\tau_y \cdot v$ comme le coloriage v translaté de y.

$$\tau_y \cdot v : x \mapsto v(x \underset{?}{\pm} y)$$

Comment formuler la version « coloriage » du théorème ?

$$\Omega = \{\text{blanc}, \text{noir}\}^{\mathbb{Z}^d}$$

topologie produit
espace métrisable compact

$$v : x \mapsto \begin{cases} \text{blanc} & \text{si } \mathrm{PGCD}(x) = 1 \\ \text{noir} & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour $y \in \mathbb{Z}^d$, on définit $\tau_y \cdot v$ comme le coloriage v translaté de y.

$$\tau_y \cdot v : x \mapsto v(x - y)$$

Comment formuler la version « coloriage » du théorème ?

$$\Omega = \{\text{blanc}, \text{noir}\}^{\mathbb{Z}^d}$$

topologie produit
espace métrisable compact

$$v : x \mapsto \begin{cases} \text{blanc} & \text{si } \mathrm{PGCD}(x) = 1 \\ \text{noir} & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour $y \in \mathbb{Z}^d$, on définit $\tau_y \cdot v$ comme le coloriage v translaté de y.

$$\tau_y \cdot v : x \mapsto v(x - y)$$

Le signe est forcément « moins » car on veut $\tau_y \cdot v(y) = v(0)$.

Mémo

$$\Omega = \{\text{blanc}, \text{noir}\}^{\mathbb{Z}^d}$$

$$v : x \mapsto \begin{cases} \text{blanc} & \text{si } \mathrm{PGCD}(x) = 1 \\ \text{noir} & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour $y \in \mathbb{Z}^d$, $\tau_y \cdot v = v$ translaté de y.

$$\tau_y \cdot v : x \mapsto v(x - y)$$

Théorème

Soit X_n un point choisi uniformément au hasard dans F_n.

Alors $\tau_{-X_n} \cdot v$ converge en loi vers une mesure de probabilité explicite ρ sur Ω.

Mémo

$$\Omega = \{\text{blanc}, \text{noir}\}^{\mathbb{Z}^d}$$

$$v : x \mapsto \begin{cases} \text{blanc} & \text{si } \mathrm{PGCD}(x) = 1 \\ \text{noir} & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour $y \in \mathbb{Z}^d$, $\tau_y \cdot v = v$ translaté de y.

$$\tau_y \cdot v : x \mapsto v(x - y)$$

Théorème

Soit X_n un point choisi uniformément au hasard dans F_n.

Alors $\tau_{-X_n} \cdot v$ converge en loi vers une mesure de probabilité explicite ρ sur Ω.

Cela signifie que pour tout événement $A \subset \Omega$ « de taille finie »,

$$\mathbb{P}(\tau_{-X_n} \cdot v \in A) \xrightarrow[n \to \infty]{} \rho(A).$$

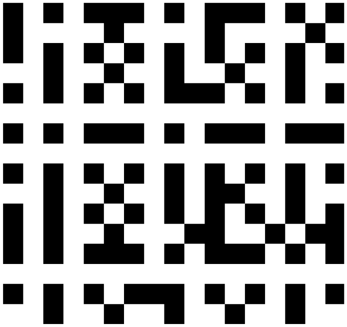
Théorème

Soit X_n un point choisi uniformément au hasard dans F_n.

Alors $\tau_{-X_n} \cdot v$ converge en loi vers une mesure de probabilité explicite ρ sur Ω.

Cela signifie que pour tout événement $A \subset \Omega$ « de taille finie »,

$$\mathbb{P}(\tau_{-X_n} \cdot v \in A) \xrightarrow[n \to \infty]{} \rho(A).$$



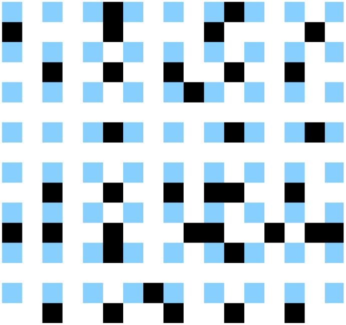
Théorème

Soit X_n un point choisi uniformément au hasard dans F_n.

Alors $\tau_{-X_n} \cdot v$ converge en loi vers une mesure de probabilité explicite ρ sur Ω.

Cela signifie que pour tout événement $A \subset \Omega$ « de taille finie »,

$$\mathbb{P}(\tau_{-X_n} \cdot v \in A) \xrightarrow[n \to \infty]{} \rho(A).$$



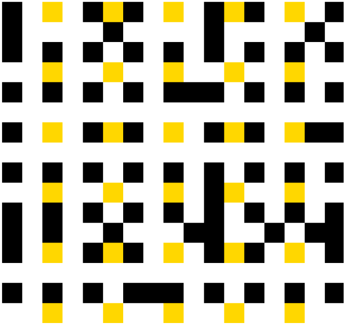
Théorème

Soit X_n un point choisi uniformément au hasard dans F_n.

Alors $\tau_{-X_n} \cdot v$ converge en loi vers une mesure de probabilité explicite ρ sur Ω.

Cela signifie que pour tout événement $A \subset \Omega$ « de taille finie »,

$$\mathbb{P}(\tau_{-X_n} \cdot v \in A) \xrightarrow[n \to \infty]{} \rho(A).$$



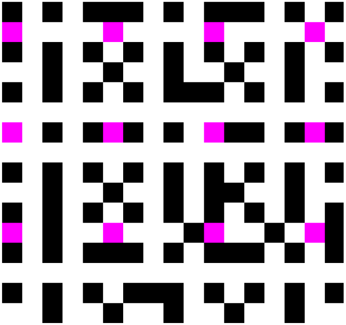
Théorème

Soit X_n un point choisi uniformément au hasard dans F_n.

Alors $\tau_{-X_n} \cdot v$ converge en loi vers une mesure de probabilité explicite ρ sur Ω.

Cela signifie que pour tout événement $A \subset \Omega$ « de taille finie »,

$$\mathbb{P}(\tau_{-X_n} \cdot v \in A) \xrightarrow[n\to\infty]{} \rho(A).$$



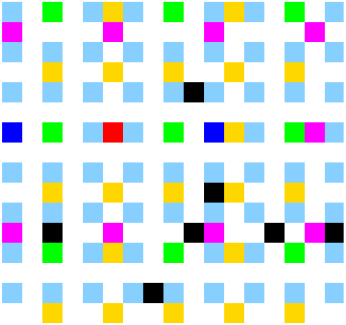
Théorème

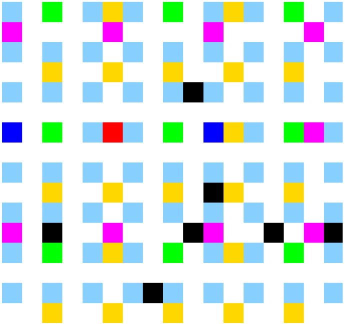
Soit X_n un point choisi uniformément au hasard dans F_n.

Alors $\tau_{-X_n} \cdot v$ converge en loi vers une mesure de probabilité explicite ρ sur Ω.

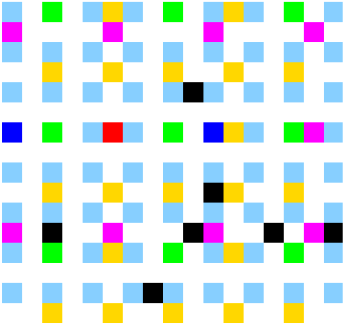
Cela signifie que pour tout événement $A \subset \Omega$ « de taille finie »,

$$\mathbb{P}(\tau_{-X_n} \cdot v \in A) \xrightarrow[n \to \infty]{} \rho(A).$$





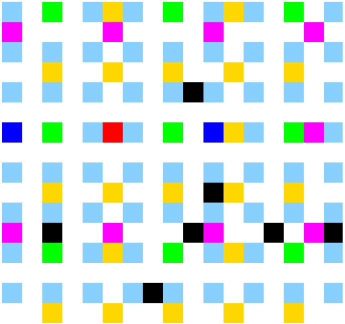
Pour tout p premier, indépendamment, on choisit un élément C_p de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^d$ uniformément au hasard.



Pour tout p premier, indépendamment, on choisit un élément C_p de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^d$ uniformément au hasard.

On définit un coloriage aléatoire comme suit :

$$x \in \mathbb{Z}^d \text{ noir } \iff \exists p, \ \pi_p(x) = C_p$$

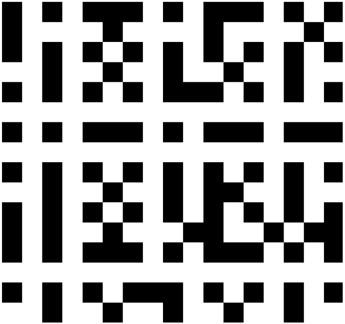


Pour tout p premier, indépendamment, on choisit un élément C_p de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^d$ uniformément au hasard.

On définit un coloriage aléatoire comme suit :

$$x \in \mathbb{Z}^d \text{ noir } \iff \exists p, \;\; \pi_p(x) = C_p$$

$$\text{Noir} = \bigcup_p C_p$$



Pour tout p premier, indépendamment, on choisit un élément C_p de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^d$ uniformément au hasard.

$$x \in \mathbb{Z}^d \text{ noir} \iff \exists p,\ \ \pi_p(x) = C_p$$

$$\text{Noir} = \bigcup_p C_p$$

On définit ρ comme la loi de ce coloriage aléatoire.

Pour tout p premier, indépendamment, on choisit un élément C_p de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^d$ uniformément au hasard.

$$x \in \mathbb{Z}^d \text{ noir} \iff \exists p, \ \ \pi_p(x) = C_p$$

$$\text{Noir} = \bigcup_p C_p$$

On définit ρ comme la loi de ce coloriage aléatoire.

Lemme

Soit X_k comme d'habitude. Soit $N \geq 1$ et soit $\pi_N : \mathbb{Z}^d \to (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^d$ la réduction modulo N.

Alors $\pi_N(X_k) \xrightarrow[k\to\infty]{\text{(d)}} \text{Unif}\left((\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^d\right)$.

Pour tout p premier, indépendamment, on choisit un élément C_p de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^d$ uniformément au hasard.

$$x \in \mathbb{Z}^d \text{ noir} \iff \exists p, \;\; \pi_p(x) = C_p$$

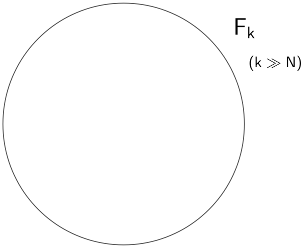
$$\text{Noir} = \bigcup_p C_p$$

On définit ρ comme la loi de ce coloriage aléatoire.

Lemme

Soit X_k comme d'habitude. Soit $N \geq 1$ et soit $\pi_N : \mathbb{Z}^d \to (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^d$ la réduction modulo N.

Alors $\pi_N(X_k) \xrightarrow[k\to\infty]{(d)} \text{Unif}\left((\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^d\right)$.



Pour tout p premier, indépendamment, on choisit un élément C_p de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^d$ uniformément au hasard.

$$x \in \mathbb{Z}^d \text{ noir} \iff \exists p,\ \pi_p(x) = C_p$$

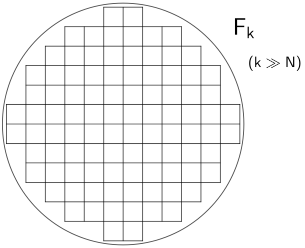
$$\text{Noir} = \bigcup_p C_p$$

On définit ρ comme la loi de ce coloriage aléatoire.

Lemme

Soit X_k comme d'habitude. Soit $N \geq 1$ et soit $\pi_N : \mathbb{Z}^d \to (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^d$ la réduction modulo N.

Alors $\pi_N(X_k) \xrightarrow[k\to\infty]{(d)} \text{Unif}\left((\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^d\right)$.



Pour tout p premier, indépendamment, on choisit un élément C_p de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^d$ uniformément au hasard.

$$x \in \mathbb{Z}^d \text{ noir } \iff \exists p, \ \pi_p(x) = C_p$$

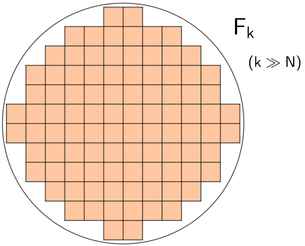
$$\text{Noir} = \bigcup_p C_p$$

On définit ρ comme la loi de ce coloriage aléatoire.

Lemme

Soit X_k comme d'habitude. Soit $N \geq 1$ et soit $\pi_N : \mathbb{Z}^d \to (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^d$ la réduction modulo N.

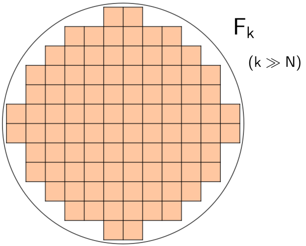
Alors $\pi_N(X_k) \xrightarrow[k\to\infty]{(d)} \text{Unif}\left((\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^d\right)$.



Lemme

Soit X_k comme d'habitude. Soit $N \geq 1$ et soit $\pi_N : \mathbb{Z}^d \to (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^d$ la réduction modulo N.

Alors $\pi_N(X_k) \xrightarrow[k\to\infty]{(d)}$ Unif $((\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^d)$.



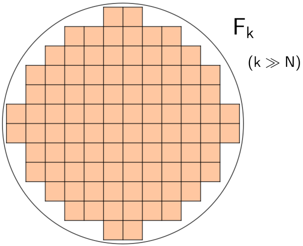
D'après le lemme chinois, pour $N = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, on a

$$(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^d \cong \prod_{i=1}^{k} (\mathbb{Z}/p_i^{\alpha_i}\mathbb{Z})^d$$

Lemme

Soit X_k comme d'habitude. Soit $N \geq 1$ et soit $\pi_N : \mathbb{Z}^d \to (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^d$ la réduction modulo N.

Alors $\pi_N(X_k) \xrightarrow[k\to\infty]{(d)} \mathrm{Unif}\left((\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^d\right)$.



D'après le lemme chinois, pour $N = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, on a

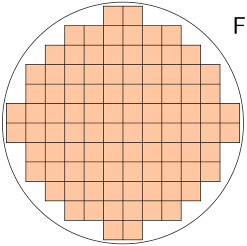
$$(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^d \cong \prod_{i=1}^{k} (\mathbb{Z}/p_i^{\alpha_i}\mathbb{Z})^d$$

$$\mathrm{Unif}\left(\prod_i E_i\right) = \bigotimes_i \mathrm{Unif}(E_i)$$

Lemme

Soit X_k comme d'habitude. Soit $N \geq 1$ et soit $\pi_N : \mathbb{Z}^d \to (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^d$ la réduction modulo N.

Alors $\pi_N(X_k) \xrightarrow[k\to\infty]{(d)} \mathrm{Unif}\left((\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^d\right)$.



D'après le lemme chinois, pour $N = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, on a

$$(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^d \cong \prod_{i=1}^{k} (\mathbb{Z}/p_i^{\alpha_i}\mathbb{Z})^d$$

$$\mathrm{Unif}\left(\prod_i E_i\right) = \bigotimes_i \mathrm{Unif}(E_i)$$

C'est de là que viennent les p-couches indépendantes.

D'après le lemme chinois, pour $N = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, on a

$$(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^d \cong \prod_{i=1}^{k} (\mathbb{Z}/p_i^{\alpha_i}\mathbb{Z})^d$$

$$\mathcal{U}\mathrm{nif}\left(\prod_i E_i\right) = \bigotimes_i \mathcal{U}\mathrm{nif}(E_i)$$

C'est de là que viennent les p-couches indépendantes.

Mais problème : ces observations ne suffisent pas à conclure, à cause d'un « manque de continuité ».

D'après le lemme chinois, pour $N = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, on a

$$(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^d \cong \prod_{i=1}^{k} (\mathbb{Z}/p_i^{\alpha_i}\mathbb{Z})^d$$

$$\mathrm{Unif}\left(\prod_i E_i\right) = \bigotimes_i \mathrm{Unif}(E_i)$$

C'est de là que viennent les p-couches indépendantes.

Mais problème : ces observations ne suffisent pas à conclure, à cause d'un « manque de continuité ».

Plus précisément,

$$(k!+1, 0) \xrightarrow[k\to\infty]{\text{profini}} (1, 0)$$

$$\forall N, \quad \forall k \gg 1, \quad (k!+1, 0) \equiv (1, 0) \mod N$$

D'après le lemme chinois, pour $N = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, on a

$$(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^d \cong \prod_{i=1}^{k} (\mathbb{Z}/p_i^{\alpha_i}\mathbb{Z})^d$$

$$\mathcal{U}\mathrm{nif}\left(\prod_i E_i\right) = \bigotimes_i \mathcal{U}\mathrm{nif}(E_i)$$

C'est de là que viennent les p-couches indépendantes.

Mais problème : ces observations ne suffisent pas à conclure, à cause d'un « manque de continuité ».

Plus précisément,

$$(k!+1, 0) \xrightarrow[k\to\infty]{\text{profini}} (1,0)$$

$$\forall N, \quad \forall k \gg 1, \quad (k!+1,0) \equiv (1,0) \mod N$$

mais cette convergence ne préserve pas la visibilité.

$(k!+1, 0)$ n'est pas visible alors que $(1,0)$ l'est.

Mais problème : ces observations ne suffisent pas à conclure, à cause d'un « manque de continuité ».

Plus précisément,

$$(k!+1,0) \xrightarrow[k\to\infty]{\text{profini}} (1,0)$$

$$\forall N,\quad \forall k \gg 1,\quad (k!+1,0) \equiv (1,0) \text{ mod } N$$

mais cette convergence ne préserve pas la visibilité.

$(k!+1,0)$ n'est pas visible alors que $(1,0)$ l'est.

En d'autres termes, l'ensemble des points visibles n'est pas profiniment ouvert.

Mais problème : ces observations ne suffisent pas à conclure, à cause d'un « manque de continuité ».

Plus précisément,

$$(k!+1,0) \xrightarrow[k\to\infty]{\text{profini}} (1,0)$$

$$\forall N, \quad \forall k \gg 1, \quad (k!+1,0) \equiv (1,0) \mod N$$

mais cette convergence ne préserve pas la visibilité.

$(k!+1,0)$ n'est pas visible alors que $(1,0)$ l'est.

En d'autres termes, l'ensemble des points visibles n'est pas profiniment ouvert.

Mais...

Mais problème : ces observations ne suffisent pas à conclure, à cause d'un « manque de continuité ».

Plus précisément,

$$(k!+1,0) \xrightarrow[k\to\infty]{\text{profini}} (1,0)$$

$$\forall N, \quad \forall k \gg 1, \quad (k!+1,0) \equiv (1,0) \mod N$$

mais cette convergence ne préserve pas la visibilité.

$(k!+1,0)$ n'est pas visible alors que $(1,0)$ l'est.

En d'autres termes, l'ensemble des points visibles n'est pas profiniment ouvert.

Mais... cet ensemble est profiniment fermé. (joli exercice)

Mais problème : ces observations ne suffisent pas à conclure, à cause d'un « manque de continuité ».

Plus précisément,

$$(k!+1,0) \xrightarrow[k\to\infty]{\text{profini}} (1,0)$$

$$\forall N, \quad \forall k \gg 1, \quad (k!+1,0) \equiv (1,0) \ \text{mod} \ N$$

mais cette convergence ne préserve pas la visibilité.

$(k!+1,0)$ n'est pas visible alors que $(1,0)$ l'est.

En d'autres termes, l'ensemble des points visibles n'est pas profiniment ouvert.

Mais... cet ensemble est profiniment fermé. (joli exercice)

Les sommets noirs peuvent devenir blancs à la limite mais l'inverse est impossible.

Mais problème : ces observations ne suffisent pas à conclure, à cause d'un « manque de continuité ».

Plus précisément,

$$(k!+1,0) \xrightarrow[k\to\infty]{\text{profini}} (1,0)$$

$$\forall N, \quad \forall k \gg 1, \quad (k!+1,0) \equiv (1,0) \mod N$$

mais cette convergence ne préserve pas la visibilité.

$(k!+1,0)$ n'est pas visible alors que $(1,0)$ l'est.

En d'autres termes, l'ensemble des points visibles n'est pas profiniment ouvert.

Mais... cet ensemble est profiniment fermé. (joli exercice)

Les sommets noirs peuvent devenir blancs à la limite mais l'inverse est impossible.

Cette « semi-continuité » permet de démontrer la proposition suivante.

En d'autres termes, l'ensemble des points visibles n'est pas profiniment ouvert.

Mais... cet ensemble est profiniment fermé. (joli exercice)

Les sommets noirs peuvent devenir blancs à la limite mais l'inverse est impossible.

Cette « semi-continuité » permet de démontrer la proposition suivante.

Proposition

Soit X_n comme d'habitude. Soit (n_k) une extractrice telle que $\tau_{-X_{n_k}} \cdot v$ converge en loi vers une certaine mesure de probabilité μ sur Ω.

Alors $\mu \preccurlyeq \rho$.

En d'autres termes, l'ensemble des points visibles n'est pas profiniment ouvert.

Mais… cet ensemble est profiniment fermé. (joli exercice)

Les sommets noirs peuvent devenir blancs à la limite mais l'inverse est impossible.

Cette « semi-continuité » permet de démontrer la proposition suivante.

Proposition

Soit X_n comme d'habitude. Soit (n_k) une extractrice telle que $\tau_{-X_{n_k}} \cdot v$ converge en loi vers une certaine mesure de probabilité μ sur Ω.

Alors $\mu \preccurlyeq \rho$.

→ On peut définir des variables aléatoires Col_μ et Col_ρ sur un même espace probabilisé de telle sorte que

1. $\mathrm{Col}_\mu \sim \mu$,
2. $\mathrm{Col}_\rho \sim \rho$,
3. presque sûrement, $\mathrm{Col}_\mu \subset \mathrm{Col}_\rho$.

où $\mathrm{Col} \simeq$ les éléments blancs de Col

Proposition

Soit X_n comme d'habitude. Soit (n_k) une extractrice telle que $\tau_{-X_{n_k}} \cdot v$ converge en loi vers une certaine mesure de probabilité μ sur Ω.

Alors $\mu \preccurlyeq \rho$.

→ On peut définir des variables aléatoires $\mathscr{C}ol_\mu$ et $\mathscr{C}ol_\rho$ sur un même espace probabilisé de telle sorte que

1. $\mathscr{C}ol_\mu \sim \mu$,
2. $\mathscr{C}ol_\rho \sim \rho$,
3. presque sûrement, $\mathscr{C}ol_\mu \subset \mathscr{C}ol_\rho$.

où $\mathscr{C}ol \simeq$ les éléments blancs de $\mathscr{C}ol$

Commentaires bibliographiques

Proposition

Soit X_n comme d'habitude. Soit (n_k) une extractrice telle que $\tau_{-X_{n_k}} \cdot \nu$ converge en loi vers une certaine mesure de probabilité μ sur Ω.

Alors $\mu \preccurlyeq \rho$.

→ On peut définir des variables aléatoires $\mathcal{C}ol_\mu$ et $\mathcal{C}ol_\rho$ sur un même espace probabilisé de telle sorte que

1. $\mathcal{C}ol_\mu \sim \mu$,
2. $\mathcal{C}ol_\rho \sim \rho$,
3. presque sûrement, $\mathcal{C}ol_\mu \subset \mathcal{C}ol_\rho$.

où $\mathcal{C}ol \simeq$ les éléments blancs de $\mathcal{C}ol$

Commentaires bibliographiques

Un point	Coloriage
Dirichlet (1849)	
Hardy-Wright (1938)	
Garet (2015)	

Proposition

Soit X_n comme d'habitude. Soit (n_k) une extractrice telle que $\tau_{-X_{n_k}} \cdot \nu$ converge en loi vers une certaine mesure de probabilité μ sur Ω.

Alors $\mu \preccurlyeq \rho$.

→ On peut définir des variables aléatoires Col_μ et Col_ρ sur un même espace probabilisé de telle sorte que

1. $\mathrm{Col}_\mu \sim \mu$,
2. $\mathrm{Col}_\rho \sim \rho$,
3. presque sûrement, $\mathrm{Col}_\mu \subset \mathrm{Col}_\rho$.

où Col ≃ les éléments blancs de Col

Commentaires bibliographiques

Un point	Coloriage
Dirichlet (1849)	
Hardy-Wright (1938)	
Garet (2015)	
	M. arXiv 2018

Proposition

Soit X_n comme d'habitude. Soit (n_k) une extractrice telle que $\tau_{-X_{n_k}} \cdot \nu$ converge en loi vers une certaine mesure de probabilité μ sur Ω.

Alors $\mu \preccurlyeq \rho$.

→ On peut définir des variables aléatoires Col_μ et Col_ρ sur un même espace probabilisé de telle sorte que

1. $Col_\mu \sim \mu$,
2. $Col_\rho \sim \rho$,
3. presque sûrement, $Col_\mu \subset Col_\rho$.

où $Col \simeq$ les éléments blancs de Col

Commentaires bibliographiques

Un point	Coloriage
Dirichlet (1849)	
Hardy-Wright (1938)	Pleasants-Huck (2013)
Garet (2015)	
	M. arXiv 2018

Proposition

Soit X_n comme d'habitude. Soit (n_k) une extractrice telle que $\tau_{-X_{n_k}} \cdot v$ converge en loi vers une certaine mesure de probabilité μ sur Ω.

Alors $\mu \preccurlyeq \rho$.

→ On peut définir des variables aléatoires Col_μ et Col_ρ sur un même espace probabilisé de telle sorte que

1. $\mathrm{Col}_\mu \sim \mu$,
2. $\mathrm{Col}_\rho \sim \rho$,
3. presque sûrement, $\mathrm{Col}_\mu \subset \mathrm{Col}_\rho$.

où Col ≃ les éléments blancs de Col

Commentaires bibliographiques

Un point	Coloriage
Dirichlet (1849)	
Hardy-Wright (1938)	Pleasants-Huck (2013)
Garet (2015)	
	M. arXiv 2018 (méthodes profinies)

Proposition

Soit X_n comme d'habitude. Soit (n_k) une extractrice telle que $\tau_{-X_{n_k}} \cdot \nu$ converge en loi vers une certaine mesure de probabilité μ sur Ω.

Alors $\mu \preccurlyeq \rho$.

→ On peut définir des variables aléatoires Col_μ et Col_ρ sur un même espace probabilisé de telle sorte que

1. $\mathrm{Col}_\mu \sim \mu$,
2. $\mathrm{Col}_\rho \sim \rho$,
3. presque sûrement, $\mathrm{Col}_\mu \subset \mathrm{Col}_\rho$.

où Col ≃ les éléments blancs de Col

Commentaires bibliographiques

Un point	Coloriage
Dirichlet (1849)	
Hardy-Wright (1938)	Pleasants-Huck (2013)
Garet (2015)	
Kubota-Sugita (2002) (adèles)	M. arXiv 2018 (méthodes profinies)

Commentaires bibliographiques

Un point	Coloriage
Dirichlet (1849)	
Hardy-Wright (1938)	Pleasants-Huck (2013)
Garet (2015)	
Kubota-Sugita (2002) (adèles)	M. arXiv 2018 (méthodes profinies)

→ F_n généraux

Commentaires bibliographiques

Un point	Coloriage
Dirichlet (1849)	
Hardy-Wright (1938)	Pleasants-Huck (2013)
Garet (2015)	
Kubota-Sugita (2002) (adèles)	M. arXiv 2018 (méthodes profinies)

→ F_n généraux

→ Coloriages généraux (coprimes, squarefree, PGCD...)

Commentaires bibliographiques

Un point	Coloriage
Dirichlet (1849)	
Hardy-Wright (1938)	Pleasants-Huck (2013)
Garet (2015)	
Kubota-Sugita (2002) (adèles)	M. arXiv 2018 (méthodes profinies)

→ F_n généraux

→ Coloriages généraux (coprimes, squarefree, PGCD...)

→ Limites plus générales (Benjamini-Schramm/graphon)

Commentaires bibliographiques

Un point	Coloriage
Dirichlet (1849)	
Hardy-Wright (1938)	Pleasants-Huck (2013)
Garet (2015)	
Kubota-Sugita (2002) (adèles)	M. arXiv 2018 (méthodes profinies)

→ F_n généraux

→ Coloriages généraux (coprimes, squarefree, PGCD...)

→ Limites plus générales (Benjamini-Schramm/graphon)

→ Tirer X_n dans un sous-espace affine

Commentaires bibliographiques

Un point	Coloriage
Dirichlet (1849)	
Hardy-Wright (1938)	Pleasants-Huck (2013)
Garet (2015)	
Kubota-Sugita (2002) (adèles)	M. arXiv 2018 (méthodes profinies)

→ F_n généraux

→ Coloriages généraux (coprimes, squarefree, PGCD...)

→ Limites plus générales (Benjamini-Schramm/graphon)

→ Tirer X_n dans un sous-espace affine

→ Incitation à étudier $\rho(A)$ pour A événement arbitraire

→ F_n généraux

→ Coloriages généraux (coprimes, squarefree, PGCD...)

→ Limites plus générales (Benjamini-Schramm/graphon)

→ Tirer X_n dans un sous-espace affine

→ Incitation à étudier $\rho(A)$ pour A événement arbitraire

Etude des clusters infinis

→ F_n généraux

→ Coloriages généraux (coprimes, squarefree, PGCD…)

→ Limites plus générales (Benjamini-Schramm/graphon)

→ Tirer X_n dans un sous-espace affine

→ Incitation à étudier $\rho(A)$ pour A événement arbitraire

Etude des clusters infinis

L'existence d'un cluster infini n'est pas un événement de taille finie.

→ F_n généraux

→ Coloriages généraux (coprimes, squarefree, PGCD...)

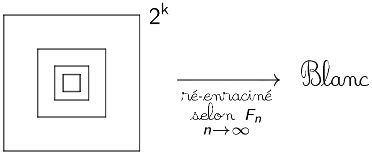
→ Limites plus générales (Benjamini-Schramm/graphon)

→ Tirer X_n dans un sous-espace affine

→ Incitation à étudier $\rho(A)$ pour A événement arbitraire

Etude des clusters infinis

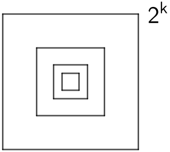
L'existence d'un cluster infini n'est pas un événement de taille finie.



- → F_n généraux
- → Coloriages généraux (coprimes, squarefree, PGCD...)
- → Limites plus générales (Benjamini-Schramm/graphon)
- → Tirer X_n dans un sous-espace affine
- → Incitation à étudier $\rho(A)$ pour A événement arbitraire

Etude des clusters infinis

L'existence d'un cluster infini n'est pas un événement de taille finie.



$\xrightarrow[\substack{\text{ré-enraciné} \\ \text{selon } F_n \\ n\to\infty}]{}$ Blanc

0 cluster blanc infini

→ F_n généraux

→ Coloriages généraux (coprimes, squarefree, PGCD…)

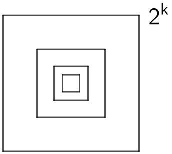
→ Limites plus générales (Benjamini-Schramm/graphon)

→ Tirer X_n dans un sous-espace affine

→ Incitation à étudier $\rho(A)$ pour A événement arbitraire

Etude des clusters infinis

L'existence d'un cluster infini n'est pas un événement de taille finie.



$\xrightarrow[\substack{\text{ré-enraciné} \\ \text{selon } F_n \\ n\to\infty}]{}$ Blanc

0 cluster blanc infini 1

→ F_n généraux

→ Coloriages généraux (coprimes, squarefree, PGCD...)

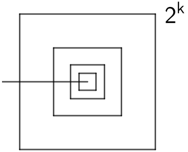
→ Limites plus générales (Benjamini-Schramm/graphon)

→ Tirer X_n dans un sous-espace affine

→ Incitation à étudier $\rho(A)$ pour A événement arbitraire

Etude des clusters infinis

L'existence d'un cluster infini n'est pas un événement de taille finie.



$\xrightarrow[\substack{\text{ré-enraciné selon } F_n \\ n\to\infty}]{}$ Blanc

0 cluster blanc infini 1

→ F_n généraux

→ Coloriages généraux (coprimes, squarefree, PGCD...)

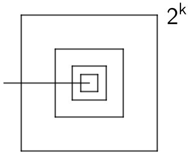
→ Limites plus générales (Benjamini-Schramm/graphon)

→ Tirer X_n dans un sous-espace affine

→ Incitation à étudier $\rho(A)$ pour A événement arbitraire

Etude des clusters infinis

L'existence d'un cluster infini n'est pas un événement de taille finie.



$\xrightarrow[\text{ré-enraciné selon } F_n,\ n\to\infty]{}$ Blanc

0 cluster blanc infini 1

1 cluster noir infini

→ F_n généraux

→ Coloriages généraux (coprimes, squarefree, PGCD...)

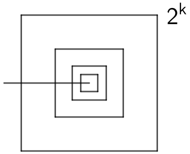
→ Limites plus générales (Benjamini-Schramm/graphon)

→ Tirer X_n dans un sous-espace affine

→ Incitation à étudier $\rho(A)$ pour A événement arbitraire

Etude des clusters infinis

L'existence d'un cluster infini n'est pas un événement de taille finie.

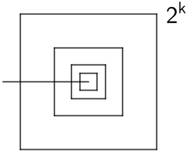


$\xrightarrow[\text{ré-enraciné selon } F_n \\ n\to\infty]{}$ Blanc

0 cluster blanc infini	1
1 cluster noir infini	0

Etude des clusters infinis

L'existence d'un cluster infini n'est pas un événement de taille finie.



$\xrightarrow[\substack{\text{ré-enraciné} \\ \text{selon } F_n \\ n \to \infty}]{}$ Blanc

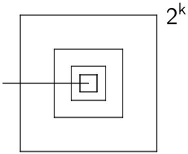
0	cluster blanc infini	1
1	cluster noir infini	0

Théorème

Pour $d \geq 2$, si $\mathbb{Z}^d$ est muni de sa structure de graphe usuelle, il existe presque sûrement un unique cluster blanc infini et aucun cluster noir infini.

Etude des clusters infinis

L'existence d'un cluster infini n'est pas un événement de taille finie.



$\xrightarrow[\substack{\text{selon } F_n \\ n \to \infty}]{}$ Blanc
ré-enraciné

0 cluster blanc infini	1
1 cluster noir infini	0

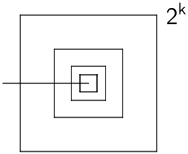
Théorème

Pour $d \geq 2$, si $\mathbb{Z}^d$ est muni de sa structure de graphe usuelle, il existe presque sûrement un unique cluster blanc infini et aucun cluster noir infini.

Burton-Keane ne s'applique pas ici car ce modèle n'est pas insertion-tolerant.

Etude des clusters infinis

L'existence d'un cluster infini n'est pas un événement de taille finie.



$\xrightarrow[\substack{\text{ré-enraciné} \\ \text{selon } F_n \\ n\to\infty}]{}$ Blanc

0 cluster blanc infini	1
1 cluster noir infini	0

Théorème

Pour $d \geq 2$, si $\mathbb{Z}^d$ est muni de sa structure de graphe usuelle, il existe presque sûrement un unique cluster blanc infini et aucun cluster noir infini.

Burton-Keane ne s'applique pas ici car ce modèle n'est pas insertion-tolerant.

$\rightarrow$ Vardi 99 + $\left\{ \begin{array}{l} \text{Pleasants-Huck 13} \\ \text{M. arXiv 18} \end{array} \right.$

$\rightarrow$ Le Fourn, Liu, M. (en cours)

Théorème

Pour $d \geq 2$, si $\mathbb{Z}^d$ est muni de sa structure de graphe usuelle, il existe presque sûrement un unique cluster blanc infini et aucun cluster noir infini.

Burton-Keane ne s'applique pas ici car ce modèle n'est pas insertion-tolerant.

→ Vardi 99 + $\left\{ \begin{array}{l} \text{Pleasants-Huck 13} \\ \text{M. arXiv 18} \end{array} \right.$

→ Le Fourn, Liu, M. (en cours)

Quid des dimensions supérieures

Théorème

Pour $d \geq 2$, si $\mathbb{Z}^d$ est muni de sa structure de graphe usuelle, il existe presque sûrement un unique cluster blanc infini et aucun cluster noir infini.

Burton-Keane ne s'applique pas ici car ce modèle n'est pas insertion-tolerant.

$\rightarrow$ Vardi 99 + $\left\{ \begin{array}{l} \text{Pleasants-Huck 13} \\ \text{M. arXiv 18} \end{array} \right.$

$\rightarrow$ Le Fourn, Liu, M. (en cours)

Quid des dimensions supérieures

C'est un corollaire du cas 2d.

Théorème

Pour $d \geq 2$, si $\mathbb{Z}^d$ est muni de sa structure de graphe usuelle, il existe presque sûrement un unique cluster blanc infini et aucun cluster noir infini.

Burton-Keane ne s'applique pas ici car ce modèle n'est pas insertion-tolerant.

→ Vardi 99 + $\begin{cases} \text{Pleasants-Huck 13} \\ \text{M. arXiv 18} \end{cases}$

→ Le Fourn, Liu, M. (en cours)

Quid des dimensions supérieures

C'est un corollaire du cas 2d.

En effet, on peut vérifier que l'ombre du modèle de dimension d via $x \mapsto (x_1, x_2)$ est précisément le modèle de dimension 2. (exo sympa)

Quid des dimensions supérieures

C'est un corollaire du cas 2d.

En effet, on peut vérifier que l'ombre du modèle de dimension d via $x \mapsto (x_1, x_2)$ est précisément le modèle de dimension 2. (exo sympa)

Pourquoi est-ce que j'aime ce modèle ?

Quid des dimensions supérieures

C'est un corollaire du cas 2d.

En effet, on peut vérifier que l'ombre du modèle de dimension d via $x \mapsto (x_1, x_2)$ est précisément le modèle de dimension 2. (exo sympa)

Pourquoi est-ce que j'aime ce modèle ?

Interaction plaisante entre arithmétique et probabilités/percolation.

Quid des dimensions supérieures

C'est un corollaire du cas 2d.

En effet, on peut vérifier que l'ombre du modèle de dimension d via $x \mapsto (x_1, x_2)$ est précisément le modèle de dimension 2. (exo sympa)

Pourquoi est-ce que j'aime ce modèle ?

Interaction plaisante entre arithmétique et probabilités/percolation.

→ source de questions arithmétiques et d'exemples en percolation

Pourquoi est-ce que j'aime ce modèle ?

Interaction sympathique entre arithmétique et probabilités/percolation.

→ source de questions arithmétiques et d'exemples en percolation

Bernoulli	Visibles

Pourquoi est-ce que j'aime ce modèle ?

Interaction sympathique entre arithmétique et probabilités/percolation.

→ source de questions arithmétiques et d'exemples en percolation

Bernoulli	Visibles
Mélangeant	Quasi-périodique (le demi-plan gauche prescrit le droit)

Pourquoi est-ce que j'aime ce modèle ?

Interaction sympathique entre arithmétique et probabilités/percolation.

→ source de questions arithmétiques et d'exemples en percolation

Bernoulli	Visibles
Mélangeant	Quasi-périodique (le demi-plan gauche prescrit le droit)
Energie finie	(non)

Pourquoi est-ce que j'aime ce modèle ?

Interaction sympathique entre arithmétique et probabilités/percolation.

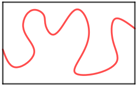
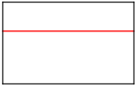
→ source de questions arithmétiques et d'exemples en percolation

Bernoulli	Visibles
Mélangeant	Quasi-périodique (le demi-plan gauche prescrit le droit)
Energie finie	(non)
Quotients subtils	Quotients faciles

Pourquoi est-ce que j'aime ce modèle ?

Interaction sympathique entre arithmétique et probabilités/percolation.

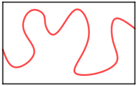
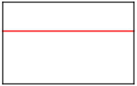
→ source de questions arithmétiques et d'exemples en percolation

Bernoulli	Visibles
Mélangeant	Quasi-périodique (le demi-plan gauche prescrit le droit)
Energie finie	(non)
Quotients subtils	Quotients faciles
	

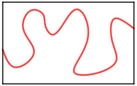
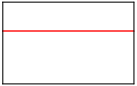
Pourquoi est-ce que j'aime ce modèle ?

Interaction sympathique entre arithmétique et probabilités/percolation.

→ source de questions arithmétiques et d'exemples en percolation

Bernoulli	Visibles
Mélangeant*	Quasi-périodique* (le demi-plan gauche prescrit le droit)
Energie finie	(non)
Quotients subtils	Quotients faciles
	

* Tao, Simons Lecture 2: structure and randomness

Bernoulli	Visibles
Mélangeant*	Quasi-périodique*
	(le demi-plan gauche prescrit le droit)
Energie finie	(non)
Quotients subtils	Quotients faciles
	

⋆ Tao, Simons Lecture 2: structure and randomness

Merci

$\mathbb{Z}^d \curvearrowright \left(\hat{\mathbb{Z}}^d, \text{Haar}\right)$